

6. Elektromagnetische Wellen

6.1. Entstehung elektromagnetischer Wellen

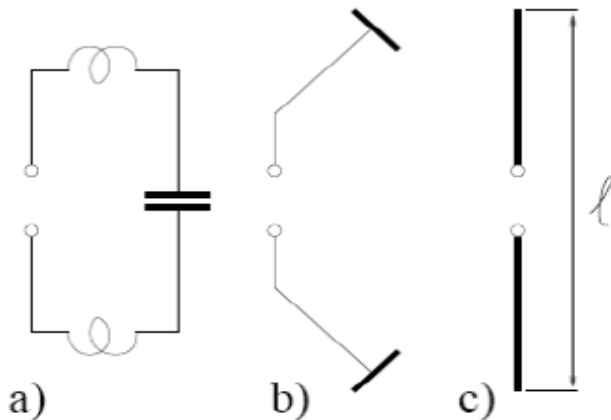
- Wir betrachten RLC-Serienschwingkreis mit Induktivität (Spule) L und Kapazität (Kondensator) C

Resonanzfrequenz: $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Induktivität: $L = \frac{\mu_r \mu_0 N^2 A_S}{l}$

Bandbreite: $\Delta\omega = \frac{R}{L}$

Kapazität: $C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A_C}{l}$

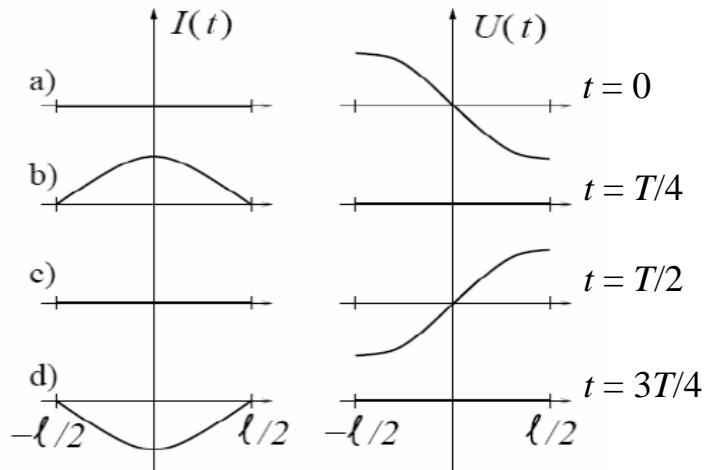


- Verkleinerung von L und C resultiert in Vergrößerung der Resonanzfrequenz ω_{res} , höheren Verlusten (in Analogie) zu Widerstand R und „Energieabstrahlung“

Übergang zum $\lambda/2$ -Dipol

Experiment: Visualisierung der Strom- und Spannungsbüuche am $\lambda/2$ -Dipol mittels Glühlampe (I) und Glimmlampe (U)

Strom- und Spannungsverlauf auf $\lambda/2$ –**Dipol** im Resonanzfall $\omega = \omega_{res}$



- $I(z, t)$ ist analog zur Grundschwingung einer Seilwelle mit festen Enden (eingespannte Saite), stehende Welle mit $\lambda/2 = l$

- Resonanzfrequenz des $\lambda/2$ -Dipols: $\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{c}{\lambda} = \pi \frac{c}{l}$
mit Phasengeschwindigkeit $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}}$

c ist Lichtgeschwindigkeit im jeweiligen Ausbreitungsmedium

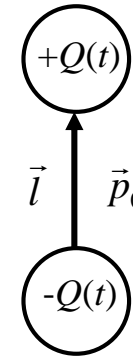
- $\pi/2$ Phasenverschiebung zwischen $I(z, t)$ und $U(z, t)$

6.2. Der Hertzsche Dipol

- **Modell:** Ersetze $\lambda/2$ Dipol durch Punktdipol - Hertzscher Dipol

mit zeitabhängigen Dipolmoment: $\vec{p}(t) = \vec{p}_0 \cos(\omega t)$

$$\vec{p}_0 = Q\vec{l}$$



- **Analyse der Maxwell'schen Gleichungen**

$$\epsilon_r \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \rho$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_r \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\mu_r \mu_0 \operatorname{div} \vec{H} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \epsilon_r \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ergibt das elektromagnetische Feld des Hertz'schen Dipols

(Ableitung siehe u. a. Demtröder II, Pfeifer-Schmiedel, ...)

- Ergebnisse

1. Es gibt ein Nahfeld ($r < \lambda$) und ein Fernfeld ($r \gg \lambda$)

2. Ortsabhängigkeiten des elektrischen und magnetischen Feldes im Nahfeld:

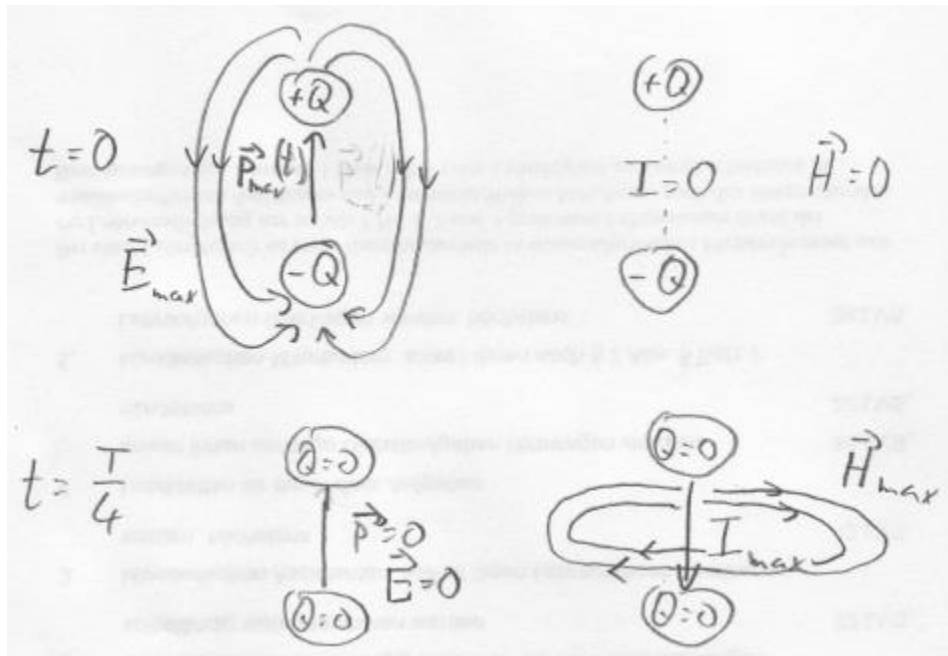
$$|\vec{E}(\vec{r}, t)| \propto \frac{1}{r^3}$$

vgl. mit Feld des elektrischen Dipols $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\frac{3(\vec{p}\vec{r})}{r^2} \vec{r} - \vec{p} \right)$

$$|\vec{H}(\vec{r}, t)| \propto \frac{1}{r^3}$$

vgl. mit Feld des magn. Dipols (Kreisstrom) $\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4 \cdot \pi r^3} \cdot \left\{ \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})}{r^2} \vec{r} - \vec{m} \right\}$

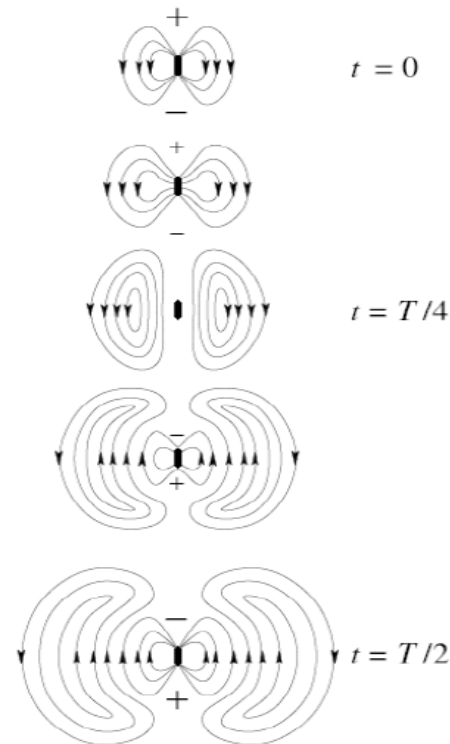
3. im Nahfeld sind \vec{E} und \vec{H} um $\pi/2$ phasenverschoben



4. Im Fernfeld erfolgt der Aufbau der \vec{E} - und \vec{H} -Felder nicht momentan sondern mit der Lichtgeschwindigkeit c
⇒ **Abschnürung der Felder** ⇒ **Bildung elektromagnetischer Wellen**

Hertzscher Dipol

Feldabschnürung am
Beispiel des elektrischen
Feldes



Animation Feldabschnürung

5. \vec{H} und \vec{E} im Fernfeld:

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi cr} \left(\frac{d^2 \vec{p}(t)}{dt^2} \right)_{t_r} \times \vec{e}_r$$

mit zeitabhängigen Dipolmoment: $\vec{p}(t) = \vec{p}_0 \cos \omega t$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0 c^2 r} \left[\left(\frac{d^2 \vec{p}(t)}{dt^2} \right)_{t_r} \times \vec{e}_r \right] \times \vec{e}_r$$

Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Welle: $c = (\epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0)^{-1/2}$

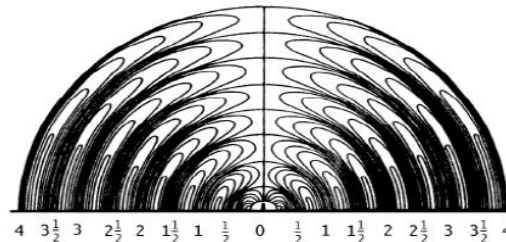
im Vakuum gilt: $c_0 = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2} = 2,998 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$

retardierte Zeit $t_r = t - \frac{r}{c}$

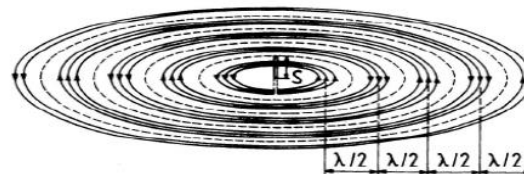
(Vakuumlichtgeschwindigkeit)

Hertzscher Dipol - Fernfeld

elektrisches
Fern-Feld im oberen
Halbraum
(Dipol vertikal orientiert,
entlang z, bei 0)



magnetisches
Fern-Feld in Ebene
senkrecht zum Dipol



$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi cr} \left(\frac{d^2 \vec{p}(t)}{dt^2} \right)_{t_r} \times \vec{e}_r$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0 c^2 r} \left[\left(\frac{d^2 \vec{p}(t)}{dt^2} \right)_{t_r} \times \vec{e}_r \right] \times \vec{e}_r$$

Aus Gleichungen für \vec{H} und \vec{E} im Fernfeld folgt:

$$\text{mit } c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}$$

→ $|\vec{H}(\vec{r}, t)| \propto \frac{1}{r}$ geringe Schwächung mit zunehmenden Abstand

$|\vec{E}(\vec{r}, t)| \propto \frac{1}{r}$ ⇒ Signalübertragung

→ keine Phasenverschiebung zwischen \vec{H} und \vec{E}

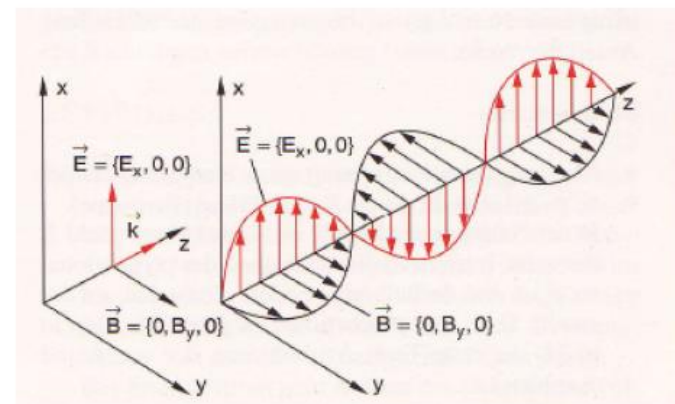
→ Aus Vektorprodukten in Gleichungen für \vec{H} und \vec{E} :

$\vec{E} \perp \vec{H} \perp \vec{e}_r \Rightarrow$ Polarisation der elektromagnetischen Welle

$$\vec{E} = c \left[\mu_r \mu_0 \vec{H} \times \vec{e}_r \right]$$

$$\vec{E} = c \left[\vec{B} \times \vec{e}_r \right]$$

Linear polarisierte elektromagnetische Welle



Experiment: Polarisation der Dipolstrahlung

6.3. Interpretation der Ausbreitungsgeschwindigkeit c der elektromagnetischen Welle

Ausbreitung im Vakuum: $\epsilon_r = 1$ $\mu_r = 1$ $\rho = 0$ $\vec{j} = 0$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{rot } \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\text{rot } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{B}) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Maxw. Gln.} \\ \epsilon_r \epsilon_0 \text{ div } \vec{E} = \rho \qquad \mu_r \mu_0 \text{ div } \vec{H} = 0 \\ \text{rot } \vec{E} = -\mu_r \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \epsilon_r \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right\}$$

$$\text{Nutze: } \text{rot rot } \vec{E} = \underbrace{\text{grad}(\text{div } \vec{E})}_{\text{div } \vec{E} = \rho = 0} - \underbrace{\text{div}(\text{grad } \vec{E})}_{-\text{div}(\text{grad } \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{E} = -\Delta \vec{E}} = -\Delta \vec{E}$$

da Vakuum

$$\longrightarrow \boxed{\Delta \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

Wellengleichung

in Komponenten: $\Delta E_i = \frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2}$
 $(i = x, y, z)$

mit Phasengeschwindigkeit
(Ausbreitungsgeschwindigkeit) im Vakuum:

$$\boxed{v_{ph} = c_0 = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}}}$$

Vakuumlichtgeschwindigkeit

$$\left. \begin{array}{l} \text{1 dim. Wellengln. in Mechanik:} \\ \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v_{Ph}^2} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} \end{array} \right\}$$

Ausbreitung im Medium: $\epsilon_r > 1$ $\mu_r \geq 1$

$$v_{ph} = c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$$

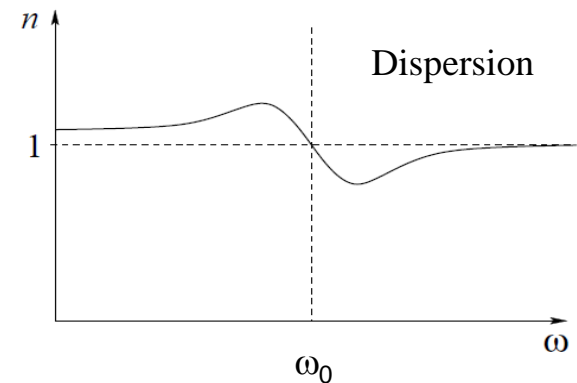
falls $\mu_r \cong 1$ kein Ferromagnetikum

$$v_{ph} = c = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

mit $\sqrt{\epsilon_r} = n$ n – Brechungsindex, hängt im Medium von Frequenz $\omega = 2\pi\nu$ ab: $n = n(\omega)$

(Maxwell-Relation)

folgt $v_{ph} = c = \frac{c_0}{n}$



- Beachte: Frequenz ν bzw. ω bleibt unverändert, aber Lichtgeschwindigkeit $c = \frac{c_0}{n}$

und Wellenlänge $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$ sind abhängig vom Ausbreitungsmedium und Frequenz \rightarrow Dispersion !

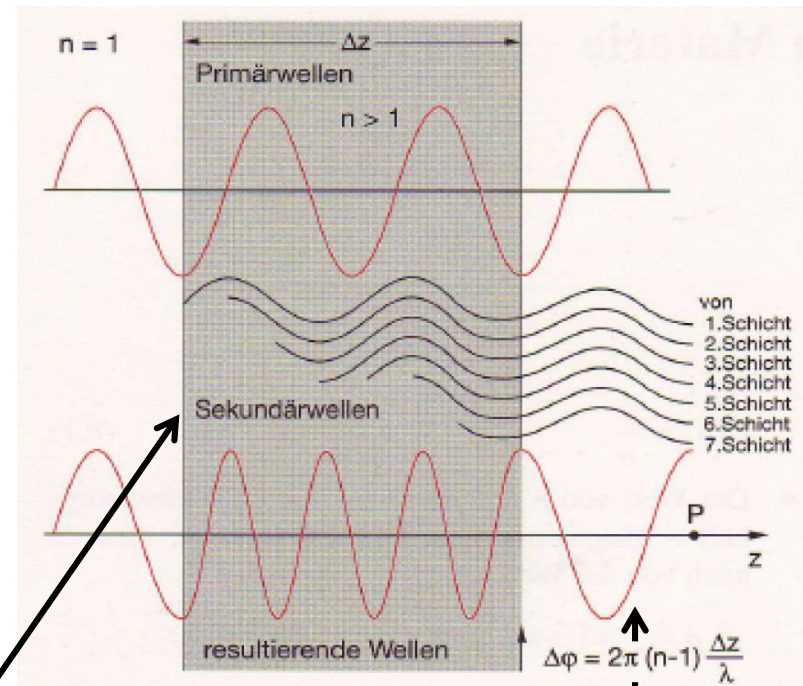
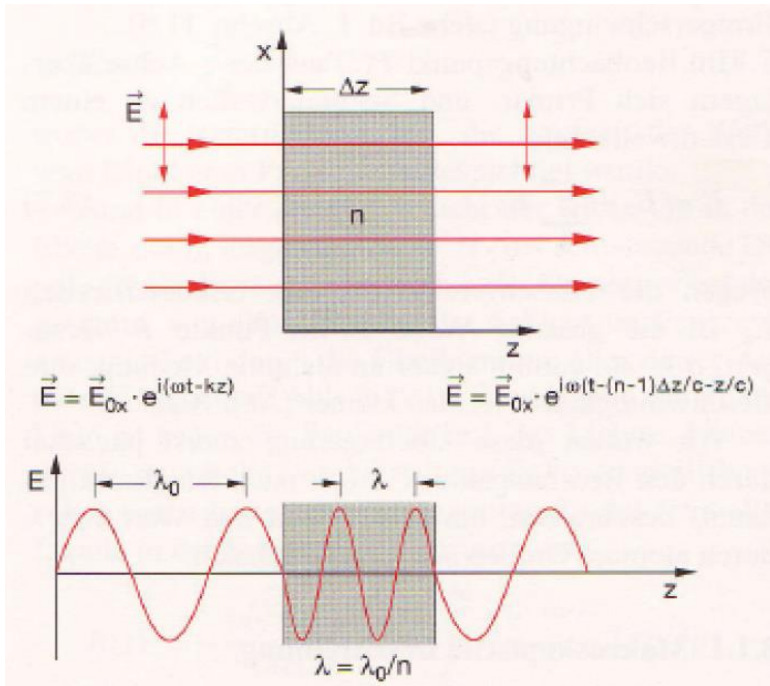
Vakuum:

$$c_0 = \nu \lambda_0$$

Materie:

$$c = \frac{c_0}{n} = \nu \frac{\lambda_0}{n} = \nu \lambda$$

Dispersion



- Verkürzung der Wellenlänge im Medium bei konstanter Frequenz ω

- Im Medium erzwungene Schwingung der Valenzelektronen mit Frequenz ω und Abstrahlung elektromagnetischer Sekundärwellen durch diese schwingenden Dipole mit gleicher Frequenz aber mit Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ (vgl. erzwungene Schwingung in Mechanik).

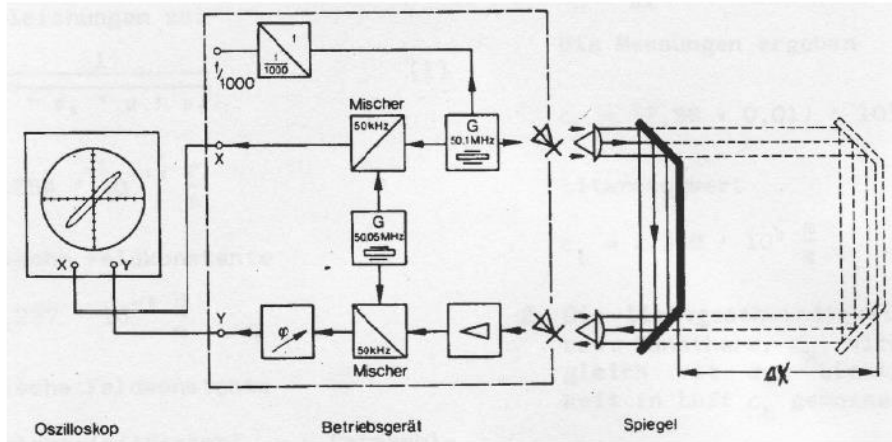
- Hinter Medium Superposition von Primär- und Sekundärwellen.

- Auf Grund der Phasenverschiebung erscheint die resultierende Gesamtwellen verzögert hinter dem Medium.

→ Verringerung der Phasengeschwindigkeit im Medium

Experiment Lichtgeschwindigkeit in Luft und H₂O

a) c in Luft, $c \approx c_0$



Modulation der Lichtwelle mit $f = 50$ MHz

Phasenverschiebung φ der modulierten
Lichtwelle durch Änderung des Lichtweg um

$$\Delta l = 2\Delta x$$

z. Bsp. bei $\varphi = \pi$ benötigt Licht für Δl zusätzliche Zeit

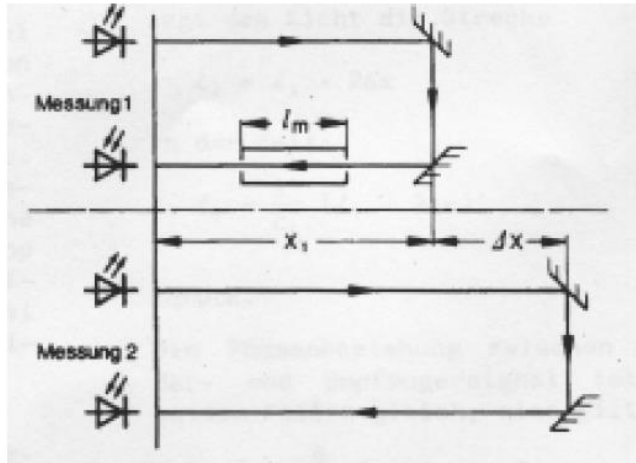
$$\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{1}{2f}$$

somit ergibt sich für Lichtgeschwindigkeit:

$$c = \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{2\Delta x}{\frac{1}{2f}} = 4f \Delta x$$

mit $f = 50$ MHz folgt $c = 2,99 \cdot 10^8$ m/s $\approx c_0$

b) $c = c_0/n$ in H_2O



Laufzeiten des Lichtes:

$$t_1 = \frac{2x_1 - l_m}{c_0} + \frac{l_m}{c}$$

$$t_2 = \frac{2x_1 + 2\Delta x}{c_0}$$

Δx so einstellen, dass Phase für beide Experimente die Phase gleich ist ($\varphi = 0$), dann benötigen Lichtwellen für die unterschiedlichen Wege die gleiche Zeit:

$$t_1 = t_2$$

$$\frac{2x_1 - l_m}{c_0} + \frac{l_m}{c} = \frac{2x_1 + 2\Delta x}{c_0}$$

$$\frac{l_m}{c} = \frac{2\Delta x + l_m}{c_0}$$

$$\Rightarrow c = c_0 \frac{l_m}{2\Delta x + l_m}$$

$$c = 2,25 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \quad n = \frac{c_0}{c} = 1,33$$

6.4. Charakteristische Größen des Fernfeldes

\vec{H} und \vec{E} im Fernfeld:
$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi cr} \left(\frac{d^2 \vec{p}(t)}{dt^2} \right)_{t_r} \times \vec{e}_r$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0 c^2 r} \left[\left(\frac{d^2 \vec{p}(t)}{dt^2} \right)_{t_r} \times \vec{e}_r \right] \times \vec{e}_r$$

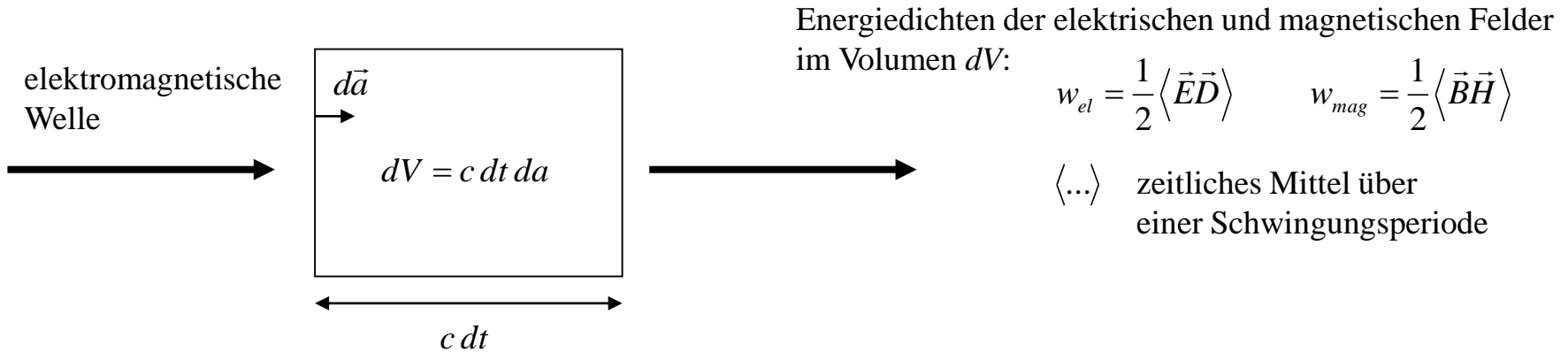
$$c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}}$$

- Feldwellenwiderstand Z_F :

$$Z_F = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = \frac{1}{\epsilon_r \epsilon_0 c} = \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}}$$

im Vakuum gilt: $Z_F \approx 380 \Omega$
($\epsilon_r = \mu_r = 1$)

- **Pointing-Vektor** \vec{S} : Leistung, die von elektromagnetischer Welle übertragen wird



gesamte Energie im Volumen dV :

$$dE_{tot} = (w_{el} + w_{mag}) dV = \left(\frac{1}{2} \langle \vec{E} \vec{D} \rangle + \frac{1}{2} \langle \vec{B} \vec{H} \rangle \right) c dt da$$

$$dE_{tot} = \left(\frac{\epsilon_r \epsilon_0}{2} \langle \vec{E}^2 \rangle + \frac{\mu_r \mu_0}{2} \langle \vec{H}^2 \rangle \right) c dt da = \epsilon_r \epsilon_0 \langle \vec{E}^2 \rangle c dt da$$

$$dE_{tot} = \sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0} \langle \vec{E} \vec{H} \rangle c dt da = \langle \vec{E} \vec{H} \rangle dt da$$

$$Z_F = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}} \rightarrow |\vec{H}|^2 = |\vec{E}|^2 \frac{\epsilon_r \epsilon_0}{\mu_r \mu_0}$$

$$|\vec{E}| = |\vec{H}| \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}}$$

da $\vec{E} \perp \vec{H}$

$$dE_{tot} = \langle (\vec{E} \times \vec{H})_{\perp} \rangle dt da$$

$$c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}}$$

Leistung dP , die durch Flächenelement da transportiert wird:
$$dP = \frac{dE_{tot}}{dt} = \langle (\vec{E} \times \vec{H})_{\perp} \rangle da$$

Wir bezeichnen als Pointing-Vektor das Vektorprodukt

$$\vec{S} = \langle \vec{E} \times \vec{H} \rangle$$

—————→ $dP = \vec{S} d\vec{a}$

\vec{S} gibt Ausbreitungsrichtung der elektromagnetischen Wellen an

$|\vec{S}|$ entspricht der Energiestromdichte bzw. der „Intensität“ I der elektromagnetischen Wellen

(Leistung die von Welle durch Einheitsfläche senkrecht zum Pointing-Vektor transportiert wird)

$$|\vec{S}| \propto \vec{E}^2 \quad \text{da} \quad \vec{E} = c(\vec{B} \times \vec{e}_r) \quad \text{und somit} \quad |\vec{E}| = c|\vec{B}|$$

Intensität der elektromagnetischen Wellen: $I = |\vec{S}| \propto \vec{E}^2$

I nimmt ab beim Durchlaufen eines Mediums mit Schichtdicke dx

Für die Änderung dI von I gilt: $dI \propto -dx$

$$\frac{dI}{I} = -\alpha dx$$

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\alpha \int_{x=0}^x dx$$

Lambertsches Absorptionsgesetz: $I = I_0 e^{-\alpha r}$ Absorptions(Extinktions)koeffizient α $[\alpha] = \text{m}^{-1}$

Lambert-Beersche Absorptionsgesetz: $I = I_0 e^{-N\alpha_m r}$ Molarer Absorptions(Extinktions)koeffizient α_m
 $[\alpha_m] = \text{m}^2$

Konzentration N

Experiment: Lambertsches Absorptionsgesetz

6.5. Abstrahlcharakteristik des Hertzschen Dipols

aus $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ und $\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi cr} \left(\frac{d^2 \vec{p}(t)}{dt^2} \right)_{t_r} \times \vec{e}_r$ $\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0 c^2 r} \left[\left(\frac{d^2 \vec{p}(t)}{dt^2} \right)_{t_r} \times \vec{e}_r \right] \times \vec{e}_r$

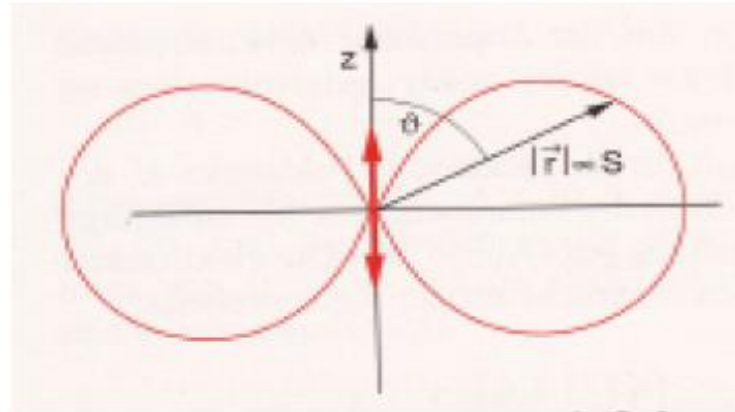
folgt unter Verwendung von $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

$$\vec{S} = \frac{1}{16\pi^2 c^3 \epsilon_r \epsilon_0 r^2} \left\langle \left[\left(\frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} \right)_{t_r} \times \vec{e}_r \right]^2 \right\rangle \vec{e}_r$$

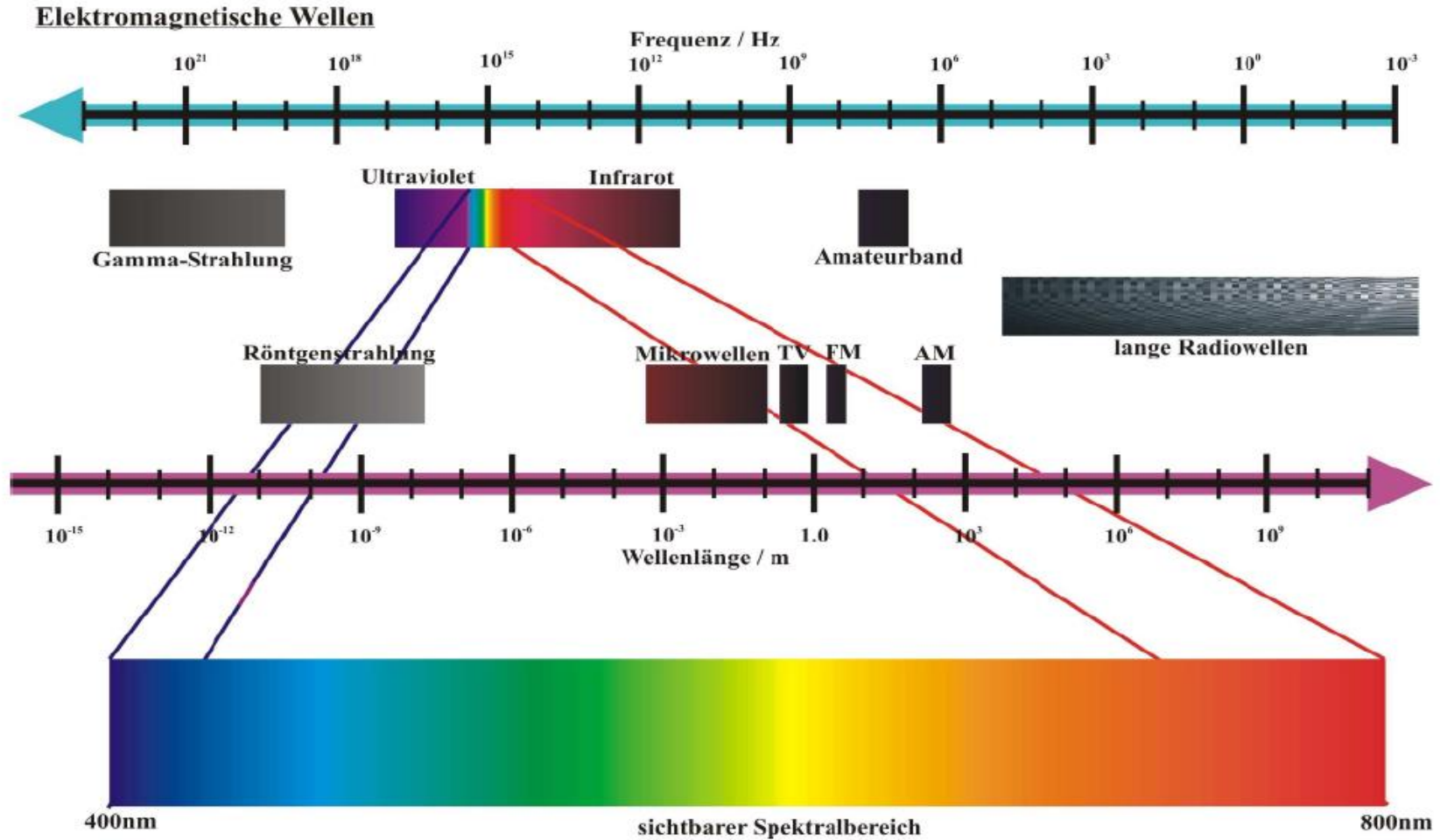
$$\vec{S} = \frac{1}{16\pi^2 c^3 \epsilon_r \epsilon_0 r^2} \left\langle \left(\frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} \right)_{t_r}^2 \right\rangle \sin^2 \vartheta \vec{e}_r$$

Abstrahlcharakteristik:

$$\longrightarrow \left| \vec{S} \right| \propto \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2}$$



6.6. Das elektromagnetische Spektrum



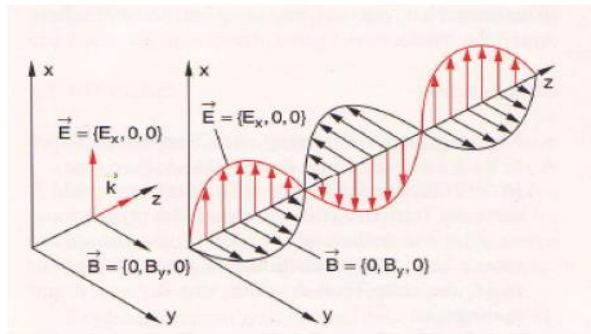
Charakter der elektromagnetischen Wellen ändert sich mit Frequenz $\nu = c/\lambda$
infolge der unterschiedlichen Energien der Lichtquanten $E = h \nu$

Frequenzbereich: 10^{25} Größenordnungen !

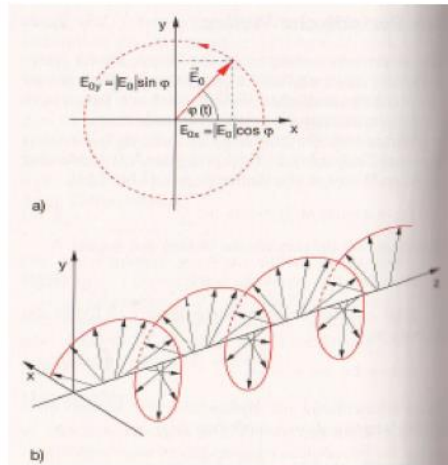
Neben Frequenz ν und der Wellenlänge λ sind die Amplituden des elektrischen und magnetischen Feldes $|\vec{E}_0|$ und $|\vec{H}_0|$ sowie die Polarisation wichtige Parameter der elektromagnetischen Wellen.

Polarisationstypen:

- linear polarisiert



- zirkular polarisiert



- elliptisch polarisiert

- unpolarisiert

*Experiment: Polarisation von Mikrowellen ($\nu \approx 9 \text{ GHz}$, $\lambda \approx 0.027 \text{ m} = 2.7 \text{ cm}$)
(linear polarisiert)*